# משפט

יהי טור חזקות בעל רדיוס התכנסות , אזי לכל הטור מתכנס במ"ש על

# משפט

יהי טור חזקות בעל רדיוס התכנסות , אזי הסכום של הטור הינו פונקציה רציפה על

## הוכחה

נסמן . נקבע . לפי המשפט הקודם במ"ש על . לכל n, הינו פולינום, לכן רציפה על , לכל . לכן S רציפה על שכן

## דוגמה

הטור מקיים ו, פונקציה רציפה על אבל אינה רציפה בשום קטע גדול יותר.

# משפט

יהי טור חזקות בעל רדיוס התכנסות ונסמן . אזי הינו פונקציה גזירה ומתקיים

## הוכחה

נחשב את רדיוס התכנסות של הטור

לכן רדיוס ההתכנסות של היינו R ומכאן טור זה מתכנס במ"ש על כל קטע באשר . נסמן את סכומו ב. ידוע לנו שהטור המקורי מתכנס במ"ש על לכל . ע"פ המשפט שהוכחנו בפעם הקודמת הסכום של הוא פונקציה גזירה ב ולכן גזירה על ומתקיים ש:

# משפט

יהי טור חזקות בעל רדיוס התכנסות אזי הינו פונקציה גזירה לכל סדר שהוא ומתקיים:

# הערה

שים ♥ לכך ש. לכן אם עבור אזי*זה אומר שיכול להיות רק טור אחד כזה, כי אם יש שניים אז המקדמים מלתכדים.*

*עכשיו נניח שf הינה פונקציה גזירה אינסוף פעמים בסביבת 0. נתבונן בטור*

1. האם טור זה מתכנס בסביבת 0?
2. אם הטור מתכנס, האם באיזה שהיא סביבה של 0?

**לא ולא!**

# משפט(בורל)

לכל סדרה יש פונקציה f גזירה אינסוף פעמים ב כך ש

באשר לשאלה השניה, קח אזי לכל אבל אם

# משפט

תהי f פונקציה גזירה מכל סדר ב. אם קיים ו כך שלכל ולכן , אזי לטור יש רדיוס התכנסות ו עבור

## הוכחה

ע"פ ההנחה שf גזירה מכל סדר ב אפשר לפתח f בפיתוח טיילור סופי מכל סדר שהוא(עם שארית כמובן) באשר .  
ז"א לכל

## דוגמאות

1. , , . מכאן הטור מתכנס במ"ש על לכל ⇦
2. , , , , ... ברור ש לכל . לכן התנאי מתקיים (הוכח!) והטור מתכנס לכל x וסכומו
3. באופן דומה,
4. ,   
   **תרגיל** – בדוק!

# משפט אבל(Abel)

נניח ש, אזי

## הוכחה

שים ♥ לכך שזה קל מאוד במקרה שהטור מתכנס בהחלט. למה? צ"ל שלכל קיים כך שאם אזי

שימו ♥ שאפשר להניח ש. אמנם אם . ניישם את המשפט ל באשר

נניח ש ויהי .

### טענה

קיים N כך ש לכל

#### הוכחה

נסמן אזי כאשר ולכן קיים N כך ש לכל . נתבונן בסכום הסופי():